筛法

刘子灏

2022 年 6 月 21 日

本讲义旨在按历史发展的顺序将解析数论中的经典筛法向读者呈现出来，并证明 Goldbach 猜想研究中的划时代结论：

定理 0.1 (陈景润)**.** *每个大偶数都是一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和。存在无穷个素数 p 使 $p+2$ 为不超过两个素数的乘积。*

目录

1 筛法的起源

We often apply, consciously or not, some kind of sieve procedure whenever the subject of investigation is not directly recognizable.

—— Henryk Iwaniec[4]

在本章中，我们将从经典的数论问题中构造出具体筛法，进而推广从而得出现代的抽象筛法。

1.1 Eratosthenes 筛法和等差数列上的筛法

筛法最早起源于古希腊的 Eratosthenes。他在研究数论问题的时候构思出了一种快速寻找素数的办法。这种方法后来演变成了一种计算机算法，但本讲义中我们只关注这个方法的数论部分。

简而言之，他发现如果正整数 n 不能被 $\leq \sqrt{n}$ 的素数整除，那么它必然不可能是合数。我们可以定义符号 $\pi(x; p_1, p_2, \ldots, p_r)$，来表示满足下列条件的正整数 n 之个数：

$$n \leq x, n \not\equiv 0 \pmod{p_i} (1 \leq i \leq r), \tag{1}$$

则当 $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_r \leq \sqrt{x}$ 表示所有大小不超过 x 的素数时，总有：

$$\pi(x; p_1, p_2, \ldots, p_r) = \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1. \tag{2}$$

从(2)中，我们可以看出 $\pi(x; p_1, \ldots, p_r)$ 可以被用来估计 $\pi(x)$ 的大小。更一般地，当 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ 仅表示一些不同的素数时总有：

$$\pi(x) \leq \pi(x; p_1, p_2, \ldots, p_r) + r - 1. \tag{3}$$

这是因为对于所有的 $1 \leq i \leq r$，素数 p 只可能满足下面两个性质中的一个：

1. $p \not\equiv 0 \pmod{p_i}$,

2. $p \equiv 0 \pmod{p_i}$.

其中第一种情况会被 $\pi(x; p_1, \ldots, p_r)$ 数到，而第二种情况最多只能出现 r 次。因为 $\pi(x; p_1, \ldots, p_r)$ 在计数的时候删去了一些落在特定同余类中的整数，所以此类函数也被称为**筛函数（sieve function）**。

筛函数 $\pi(x;p_1,\ldots,p_r)$ 是直接在整数集里删除同余类的，但实际上我们可以在此基础上再限制这些整数落在一个特定的同余类中。因此 Brun 定义了 $N(a,q,x;p_1,\ldots,p_r)$ 来统计满足下列条件的正整数 n 的个数：

$$n \le x, n \equiv a \pmod{q}, n \not\equiv a_i \pmod{p_i} (1 \le i \le r), \tag{4}$$

其中对于所有的 $1 \le i \le r$ 均有 $0 \le a_i < p_i$。特别地，他证明了 $(a,q)=1$ 时对于所有的 a_i，当 x 充分大、$p_1,\ldots,p_r$ 表示全体大小不超过 $x^{1/6}$ 且不整除 q 的素数时，总有：

$$N(a,q,x;p_1,\ldots,p_r) > \frac{1.007x}{\varphi(q)\log x}. \tag{5}$$

对于任何正整数 N，若其没有 $\le N^{1/6}$ 的素因子则其素因子个数必然不超过 5。利用这一点，Brun [1] 得到了结论：

定理 1.1 (Brun)**.** *任何首项与公差互素的等差数列上都具有无穷个素因子个数不超过 5 的整数。*

虽然这个结论远远弱于等差数列上的 Dirichlet 定理，但它是通过一种极其初等的手段推导出来的。从这个具体的例子中我们可以看出 Brun 方法得到的筛函数下界与具体的 $a_1,a_2,\ldots,a_r$ 的取值无关，而仅仅与同余方程的个数有关。在接下来的例子中我们可以更加深刻地认识到筛法的这种特点。

1.2 孪生素数与 Goldbach 问题中的筛法

Brun 在研究完等差数列上的筛法之后就把目光投向了孪生素数问题。现在让函数 $P(x;p_1,p_2,\ldots,p_r)$ 表示满足下列条件的正整数 n 的个数：

$$n \le x, n \not\equiv a_i, b_i \pmod{p_i} (1 \le i \le r). \tag{6}$$

特别地，如果 $a_i=0, b_i=2$ 则 $P(x;p_1,\ldots,p_r)$ 就可以被用来研究孪生素数问题。在这种情况下，Brun [1] 证明了存在固定常数 $c>0$ 使 $p_1\ldots,p_r$ 表示全体大小不超过 $x^{1/10}$ 的奇素数时：

$$P(x;p_1,\ldots,p_r) \ge 0.98x \prod_{1\le i\le r}\left(1-\frac{2}{p_i}\right). \tag{7}$$

根据 Mertens 定理，可知存在常数 $c>0$ 使：

$$\prod_{1\le i\le r}\left(1-\frac{2}{p_i}\right) \sim \frac{c}{\log^2 x}, \tag{8}$$

因此将 $P(x;p_1,\ldots,p_r)$ 的数论性质与(7)和(8)结合，就有：

定理 1.2 (Brun)**.** *存在无穷个正整数 n 使 n 和 $n+2$ 的素因子个数都不超过 9。*

若 x 为一个偶数时，则当 $a_i = 0, b_i = x$ 时 $P(x; p_1, \ldots, p_r)$ 就可以被用来研究 Goldbach 问题。由于 $p_i | x$ 时 $a_i \equiv b_i \pmod{p_i}$，所以当 x 充分大、$p_1, \ldots, p_r$ 表示大小不超过 $x^{1/10}$ 的奇素数时，Brun 得到了这样的下界：

$$P(x; p_1, \ldots, p_r) \geq 0.98x \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ p_i | x}} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ p_i \nmid x}} \left(1 - \frac{2}{p_i}\right). \tag{9}$$

将(8)与(9)结合，便有：

$$P(x; p_1, \ldots, p_r) > \frac{(98 - \varepsilon)cx}{\log^2 x} \prod_{\substack{p | x \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2}. \tag{10}$$

由于这意味着对于充分大的 x 总是存在 n 使得 n 和 $x-n$ 的素因子都大于 $x^{1/10}$，所以 Brun 从中得到了现代 Goldbach 问题研究中的首个里程碑式的结论：

定理 1.3 (Brun)**.** *每个大偶数都是两个不超过 9 个素数的乘积之和。*

Brun 在研究等差数列筛法和孪生素数以及 Goldbach 问题中的筛法时都用了非常类似的技巧，所以接下来我们将构造一种抽象的筛函数来统一 $N(a, q, x; p_1, \ldots, p_r)$ 和 $P(x; p_1, \ldots, p_r)$。

1.3 抽象的筛法

在构造抽象筛法的时候，我们可以选择直接推广 $\pi(x; p_1, \ldots, p_r)$，直接构造整数子集 $\mathcal{A}$，并让符号 $S(\mathcal{A}; p_1, \ldots, p_r)$ 表示满足下列条件的整数 n 的个数：

$$n \in \mathcal{A}, n \not\equiv 0 \pmod{p_i} (1 \leq i \leq r). \tag{11}$$

很明显 $\pi(x; p_1, \ldots, p_r)$ 恰好就是 $S(\mathcal{A}; p_1 \ldots, p_r)$ 在 $\mathcal{A} = \{n : n \leq x\}$ 的特殊情况。

对于 $N(a, q, x; p_1, \ldots, p_r)$。由于 p_i 与 q 不互素意味着此筛函数必然有界，所以在真正用它来研究问题的时候我们会要求 q 不能被任何一个 p_i 整除。因此根据中国剩余定理可知存在唯一的整数 a^* 满足：

$$0 \leq a^* < ap_1 p_2 \cdots p_r, \quad \begin{cases} a^* \equiv a \pmod{q} \\ a^* \equiv a_i \pmod{p_i} (1 \leq i \leq r) \end{cases},$$

于是当 $\mathcal{A}_q$ 表示 $\mathcal{A}$ 中 q 的倍数，可知 $\mathcal{A} = \{n - a^* : n \leq x\}$ 意味着：

$$N(a, q, x; p_1, \ldots, p_r) = S(\mathcal{A}_q; p_1, \ldots, p_r).$$

利用中国剩余定理，我们也可以让 $S(\mathcal{A};p_1,\ldots,p_r)$ 兼容 $P(x;p_1,\ldots,p_r)$。确切地说，存在唯一一组整数 a^*,b^* 满足：

$$0\le a^*,b^*<p_1\ldots p_r,\quad \begin{cases} a^*\equiv a_i \pmod{p_i} \\ b^*\equiv b_i \pmod{p_i} \end{cases} \quad (1\le i\le r),$$

所以构造 $\mathcal{A}=\{(n-a^*)(n-b^*):n\le x\}$ 便有：

$$P(x;p_1,\ldots,p_r)=S(\mathcal{A};p_1,\ldots,p_r).$$

至此我们已经用抽象筛函数 $S(\mathcal{A};p_1,\ldots,p_r)$ 构造出了能够兼容前两节所概述的筛法，但为了更加便捷地构造筛法。我们还需要做进一步抽象。

在研究筛函数性质的时候，我们时常会研究这种差分：

$$S(\mathcal{A};p_1,\ldots,p_{r-1})-S(\mathcal{A};p_1,\ldots,p_{r-1},p_r). \tag{12}$$

很明显(12)计算的是 $\mathcal{A}$ 中能被 p_r 整除但不能被 $p_1,\ldots,p_{r-1}$ 整除的整数个数，所以有：

$$S(\mathcal{A};p_1,\ldots,p_{r-1})-S(\mathcal{A};p_1,\ldots,p_{r-1},p_r)=S(\mathcal{A}_{p_r};p_1,\ldots,p_{r-1}).$$

由于 $p_1<p_2<\cdots$ 不一定取相邻的素数，所以我们可以构造集合 $\mathcal{P}$ 来表示它们。利用这个思想，我们就可以构造 $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 来表示满足下列条件的整数 n 之个数：

$$n\in\mathcal{A}, n\not\equiv 0 \pmod{p}, p\in\mathcal{P}\wedge p<z,$$

则差分公式便能化成：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},p_r)-S(\mathcal{A},\mathcal{P},p_{r+1})=S(\mathcal{A}_{p_r},\mathcal{P},p_r).$$

迭代使用这个结论，即得 **Buchstab 迭代式** [2]：

定理 1.4 (Buchstab)**.** *对于所有的 $2\le w<z$，均有：*

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=S(\mathcal{A},\mathcal{P},w)-\sum_{w\le p<z}S(\mathcal{A}_p,\mathcal{P},p).$$

特别地，当 $w=2$ 时：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=|\mathcal{A}|-\sum_{p<z}S(\mathcal{A}_p,\mathcal{P},p).$$

因此在本讲义的后续章节中我们都会以 $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 作为筛法研究的起点。

注释 1.1. 历史上第一个抽象的筛法是由 Selberg [7] 构造的。而符号 $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 是由 Halberstam 和 Richert [3] 在 1974 年构造并发扬光大的。

2 Brun 筛法

2.1 符号定义

沿用前一节中定义的符号，可知：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=\#\{a\in\mathcal{A}:p\nmid a,\forall p\in\mathcal{P}\cap[2,z)\},\tag{13}$$

很明显当 $P(z)$ 表示全体 $\mathcal{P}\cap[2,z)$ 元素的乘积时(13)就可以化成：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\(a,P(z))=1}}1.$$

利用 Möbius 反演可知：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=\sum_{d|P(z)}\mu(d)|\mathcal{A}_d|,\tag{14}$$

因此在估计 $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 时我们需要对 $|\mathcal{A}_d|$ 的大小有一定的了解。一般来讲我们会要求其满足如下性质：

命题 2.1. *存在 $X>0$ 和积性函数 $g(d)$ 使得：*

$$|\mathcal{A}_d|=g(d)X+r(d)$$

其中当 p 为素数时 $0<g(p)<1$。

注释 2.1. 再本讲义的后续章节中我们都会默认 $\mathcal{A}$ 满足这条性质。

将这个渐近公式回代至(14)中，便有：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=XV(z)+\sum_{d|P(z)}\mu(d)r(d),$$

其中 $V(z)$ 表示下列乘积：

$$V(z)=\sum_{d|P(z)}\mu(d)g(d)=\prod_{p|P(z)}(1-g(p)).$$

利用这一点，我们就得到了著名的 **Eratosthenes 筛法**：

定理 2.1 (Eratosthenes–Legendre)**.** *当 $\mathcal{A}_d$ 满足命题 2.1时，总存在 $-1\leq\theta\leq1$ 使得：*

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=XV(z)+\theta\sum_{d|P(z)}|r(d)|.$$

然而 z 较大时 Eratosthenes 筛法中产生的误差项通常以指数形式增长，所以这个时候我们就需要引入一些高级工具来处理这个问题。

2.2 上下界的构造

我们连续使用两次 Buchstab 迭代式，可知：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)=|\mathcal{A}|-\sum_{p_1<z}|\mathcal{A}_{p_1}|+\sum_{\substack{p_1<z\\p_1>p_2}}\sum_{p_2<z}S(\mathcal{A}_{p_1p_2},\mathcal{P},p_2). \tag{15}$$

通过在(15)上动手脚，我们就可以构造出上下界。

2.2.1 下界筛

如果我们设 $z_1\le z$ 并要求(15)中的 $p_2<z_1$，则有：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)\ge|\mathcal{A}|-\sum_{p_1<z}|\mathcal{A}_{p_1}|+\sum_{\substack{p_1<z\\p_1>p_2}}\sum_{p_2<z_1}S(\mathcal{A}_{p_1p_2},\mathcal{P},p_2),$$

反复使用该公式就能发现当 $z\ge z_1\ge z_2\ge\cdots\ge z_n$ 时总有：

$$\begin{aligned}S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)\ge{}&|\mathcal{A}|-\sum_{p_1<z}|\mathcal{A}_{p_1}|+\sum_{\substack{p_1<z\\p_1>p_2}}\sum_{p_2<z_1}|\mathcal{A}_{p_1p_2}|\\&-\sum_{p_1<z}\sum_{\substack{p_2<z_1\\p_1>p_2>p_3}}\sum_{p_3<z_1}|\mathcal{A}_{p_1p_2p_3}|+\cdots+\sum_{p_1<z}\sum_{\substack{p_2<z_1\\p_1>p_2>\cdots>p_{2n}}}\cdots\sum_{p_{2n}<z_n}|\mathcal{A}_{p_1p_2\cdots p_{2n}}|\\&-\sum_{p_1<z}\sum_{p_2<z_1}\cdots\sum_{\substack{p_{2n}<z_n\\p_1>p_2>\cdots>p_{2n}>p_{2n+1}}}\sum_{p_{2n+1}<z_n}|\mathcal{A}_{p_1p_2\cdots p_{2n}p_{2n+1}}|=\sum_{\substack{d|P(z)\\d\in\mathcal{D}^-}}\mu(d)|\mathcal{A}_d|,\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{D}^-$ 表示满足下列条件的 d：

$$d=p_1p_2\cdots p_m,p_1>p_2>\cdots>p_m,p_{2k}<z_k,1\le k\le\frac{m}{2}. \tag{16}$$

2.2.2 上界筛

对(15)再做一次迭代，就可以发现当 $z_1\le z$ 时总有：

$$\begin{aligned}S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)\le{}&|\mathcal{A}|-\sum_{p_1<z}|\mathcal{A}_{p_1}|+\sum_{\substack{p_1<z\\p_1>p_2}}\sum_{p_2<z}|\mathcal{A}_{p_1p_2}|\\&-\sum_{p_1<z}\sum_{\substack{p_2<z\\p_1>p_2>p_3}}\sum_{p_3<z_1}S(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3},\mathcal{P},p_3).\end{aligned}$$

迭代使用这个不等式，便得：

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \le |\mathcal{A}| - \sum_{p_1<z}|\mathcal{A}_{p_1}| + \sum_{\substack{p_1<z\\p_1>p_2}}\sum_{p_2<z}|\mathcal{A}_{p_1p_2}| \\
-\sum_{p_1<z}\sum_{\substack{p_2<z\\p_1>p_2>p_3}}\sum_{p_3<z_1}|\mathcal{A}_{p_1p_2p_3}| + \cdots - \sum_{p_1<z}\sum_{\substack{p_2<z\\p_1>p_2>\cdots>p_{2n-1}}}\cdots\sum_{p_{2n+1}<z_n}|\mathcal{A}_{p_1p_2\cdots p_{2n+1}}| \\
+\sum_{p_1<z}\sum_{p_2<z}\cdots\sum_{\substack{p_{2n+1}<z_n\\p_1>p_2>\cdots>p_{2n}>p_{2n+2}}}\sum_{p_{2n+2}<z_n}|\mathcal{A}_{p_1p_2\cdots p_{2n}p_{2n+1}}| = \sum_{\substack{d|P(z)\\d\in\mathcal{D}^+}}\mu(d)|\mathcal{A}_d|,
\end{aligned}$$

其中 $d\in\mathcal{D}^+$ 当且仅当：

$$d = p_1p_2\cdots p_m, p_1>p_2>\cdots>p_m, p_{2k+1}<z_k, 1\le k\le\frac{m-1}{2}. \tag{17}$$

2.2.3 上下界的统一

为了方便起见，我们定义 χ_0 为集合 $\mathcal{D}^-$ 的特征函数并让 χ_1 为 $\mathcal{D}^+$ 的特征函数，则根据(16)和(17)可知当 $v=0,1$ 时 $\chi_v(d)=1$ 当且仅当：

$$d = p_1\cdots p_m, p_1>\cdots>p_m, p_{2k+v}<z_k, 1\le k\le\min\left(n,\frac{m-v}{2}\right), \tag{18}$$

因此当我们定义：

$$S_v(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = \sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_v(d)|\mathcal{A}_d| \tag{19}$$

时总有：

$$S_0(\mathcal{A},\mathcal{P},z)\le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)\le S_1(\mathcal{A},\mathcal{P},z). \tag{20}$$

至此我们的任务就变成了估计 $S_v(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 的大小了。

注释 2.2. 事实上将(20)的左侧下标更换成任意非负偶数、右侧下标更换成任意正奇数时依然成立。

2.3 $S_v(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 的估计

当 $|\mathcal{A}_d|$ 满足命题 2.1时，可知存在 $-1\le\theta\le 1$ 使：

$$S_v(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = X\underbrace{\sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_v(d)g(d)}_{Q_v(z)} + \theta\underbrace{\sum_{d|P(z)}\chi_v(d)|r(d)|}_{R_v(z)}, \tag{21}$$

其中通过精确地处理，$Q_v(z)$ 将成为 $S_v(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 的主项而通过放缩 $R_v(z)$ 会成为 $S_v(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 的余项。

2.3.1 $Q_v(z)$ 的初步处理

从 $Q_v(z)$ 的构造来看，我们期待它最终能近似 $V(z)$，所以我们不妨先做一次分离，得：

$$Q_v(z) = V(z) - \sum_{d|P(z)} \mu(d)[1-\chi_v(d)]g(d).$$

结合(20)，可知：

$$\begin{aligned}\sum_{d|P(z)} \mu(d)[1-\chi_v(d)]g(d) &= \sum_{1\le k\le n} \sum_{\substack{p_1>\cdots>p_{2k+v}\ge z_k \\ z_k>p_{2k+v+1}>\cdots>p_m \\ p_{2\ell+v}<z_\ell, 1\le\ell\le k}} \mu(p_1\cdots p_m)g(p_1\cdots p_m) \\ &= \sum_{1\le k\le n} \sum_{\substack{p_1>\cdots>p_{2k+v}\ge z_k \\ p_{2\ell+v}<z_\ell, 1\le\ell\le k}} \mu(p_1\cdots p_{2k+v})g(p_1\cdots p_{2k+v}) \sum_{\delta|P(z_k)} \mu(\delta)g(\delta) \\ &= (-1)^v \sum_{1\le k\le n} V(z_k) \sum_{\substack{p_1>\cdots>p_{2k+v}\ge z_k \\ p_{2\ell+v}<z_\ell, 1\le\ell\le k}} g(p_1\cdots p_{2k+v}) \\ &= (-1)^v V(z)\Delta_v(z),\end{aligned}$$

其中 $\Delta_v(z)$ 满足：

$$\Delta_v(z) \le \sum_{1\le k\le n} \frac{V(z_k)}{V(z)} \frac{1}{(2k+v)!} \left(\sum_{z_k\le p<z} g(p) \right)^{2k+v}.$$

由于当 $0 \le y < 1$ 时：

$$y \le y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \cdots = \log(1-y)^{-1},$$

所以当 $L_k = \log[V(z_k)/V(z)]$ 时总有：

$$\Delta_v(z) \le \sum_{1\le m\le n} \frac{e^{L_m} L_m^{2m+v}}{(2m+v)!}. \tag{22}$$

2.3.2 条件 $\Omega(\kappa)$ 与 z_m 的设置

为了继续估计 $\Delta_v(z)$，我们有必要对 $g(d)$ 做更多的要求。

定义 2.1 ($\Omega(\kappa)$)**.** 存在常数 $A>0$ 使得 $2 \le w < z$ 时总有：

$$\prod_{w\le p<z} (1-g(p))^{-1} \le \left(\frac{\log z}{\log w}\right)^\kappa \left(1 + \frac{A}{\log z}\right).$$

因此有：

$$L_m \le \kappa \log \frac{\log z}{\log z_m} + \frac{A}{\log z_m}. \tag{23}$$

为了让 L_m 最终能够有一个不受制于 z 的上界，Brun 构造了这种形式的 z_m：

$$\log z_m = e^{-m\Lambda}\log z, 1 \leq m \leq n, \tag{24}$$

其中 Λ 是一个固定的正实数。另一方面我们要求 n 足够大使得 $z_n \leq 2 < z_{n-1}$，换言之：

$$e^{(n-1)\Lambda} < \frac{\log z}{\log 2} \leq e^{n\Lambda}. \tag{25}$$

2.3.3 $Q_v(z)$ 的展开式

将(24)代入到(23)中，便有：

$$\begin{aligned} L_m &\leq m\Lambda\kappa + \frac{Ae^{m\Lambda}}{\log z} \\ &= m\Lambda\kappa\left(1 + \frac{e^{m\Lambda}-1}{m\Lambda}\frac{A}{\kappa\log z}\right) + \frac{A}{\log z}, \end{aligned}$$

由于

$$\frac{e^y-1}{y} = \sum_{m\geq 1}\frac{y^{m-1}}{m!}$$

是单调递增函数，所以根据(25)，可知：

$$\begin{aligned} L_m &\leq m\Lambda\kappa\left(1 + \frac{e^{n\Lambda}-1}{n\Lambda}\frac{A}{\kappa\log z}\right) + \frac{A}{\log z} \\ &< m\Lambda\kappa\left(1 + \frac{e^{(n-1)\Lambda}}{n\Lambda}\frac{Ae^{\Lambda}}{\kappa\log z}\right) + \frac{A}{\log z} \\ &< m\Lambda\kappa\left(1 + \frac{A_1}{\log\log z}\right) + \frac{A}{\log z}. \end{aligned}$$

这意味着对于所有的 $\varepsilon > 0$，均存在 $Z > 0$ 使得当 $z > Z$ 时总有：

$$L_m < m\underbrace{\Lambda\kappa(1+\varepsilon)}_{\tau} + \frac{A}{\log z}. \tag{26}$$

现在将(26)代入到(22)，即得：

$$\begin{aligned} \Delta_v(z) &< \sum_{1\leq m\leq n}\frac{e^{m\tau}}{(2m+v)!}\left(m\tau + \frac{A}{\log z}\right)^{2m+v} e^{A/\log z} \\ &= \sum_{1\leq m\leq n}\frac{e^{m\tau}(m\tau)^{2m+v}}{(2m+v)!}\left(1 + \frac{A}{m\tau\log z}\right)^{2m+v} e^{A/\log z} \\ &< \sum_{1\leq m\leq n}\frac{e^{m\tau}(m\tau)^{2m+v}}{(2m+v)!}\exp\left\{\frac{2m+v}{m}\frac{A}{\tau\log z} + \frac{A}{\log z}\right\} \\ &\leq \sum_{1\leq m\leq n}\frac{e^{m\tau}(m\tau)^{2m+v}}{(2m+v)!}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right\}. \end{aligned}$$

我们不难看出当 r_m 表示上述和式的第 $m+1$ 项除以第 m 项的商时，有：

$$r_m \sim \frac{e^\tau}{4m^2}\left\{\frac{(m+1)\tau}{m\tau}\right\}^{2m}[(m+1)\tau]^2 \sim \frac{\tau^2}{4}e^{2+\tau},$$

因此当 $\tau^2 e^{2+\tau} < 4$ 时可知当 z 充分大时便有：

$$\begin{aligned}\Delta_v(z) &< \sum_{1\leq m\leq n}\frac{e^{m\tau}(m\tau)^{2m+v}}{(2m+v)!} + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\\ &< \sum_{m\geq 1}\frac{e^{m\tau}(m\tau)^{2m+v}}{(2m+v)!}.\end{aligned}$$

综上所述我们就得到了结论：

引理 2.1. 对于每个充分大的 z，总存在 $-1\leq\theta\leq 1$ 使得：

$$\frac{Q_v(z)}{V(z)} = 1+\theta\sum_{m\geq 1}\frac{e^{m\tau}(m\tau)^{2m+v}}{(2m+v)!},$$

其中 v 为非负整数，正数 τ 满足 $0<\tau^2 e^{2+\tau}<4$。

接下来就只需要估计 $R_v(z)$ 的上界了。

2.3.4 $R_v(z)$ 的上界估计

为了灵活性，我们并不打算像 $g(d)$ 一样给 $r(d)$ 增添限制条件。所以在本节中我们只会估计这个和式：

$$M_v(z;f) = \sum_{d|P(z)}\chi_v(d)f(d), \tag{27}$$

其中 $f(d)$ 为一个积性函数。因此根据(18)，可知 $v\geq 0$ 时总有：

$$M_v(z;f) \leq \left(1+\sum_{p<z}f(p)\right)^{1+v}\prod_{1\leq m<n}\left(1+\sum_{p<z_m}f(p)\right)^2. \tag{28}$$

在很多应用场景中 $f(p)$ 通常是有界的，所以此时我们可以追加条件，即存在 $B>0$ 使 $y\geq 2$ 时总有：

$$1+\sum_{p<y}f(p) \leq \frac{By}{\log y}.$$

将这个条件代入到(28)中，便可发现 z 充分大时：

$$\begin{aligned}
M_v(z;f) &< z^{1+v}\prod_{1\le m<n}\left(\frac{Bz_m}{\log z_m}\right)^2\\
&< z^{1+v+2(e^{-\Lambda}+e^{-2\Lambda}+\cdots)}\prod_{1\le m<n}\left(\frac{Be^{m\Lambda}}{\log z}\right)^2\\
&= z^{1+v+\frac{2}{e^{\Lambda}-1}}e^{n(n-1)\Lambda}\prod_{1\le m<n}\left(\frac{B}{\log z}\right)^2\\
&= z^{1+v+\frac{2}{e^{\Lambda}-1}}\left(\frac{Be^{n\Lambda/2}}{\log z}\right)^{2(n-1)}.
\end{aligned}$$

现在根据(25)，可知：

$$\frac{e^{n\Lambda/2}}{\log z}<\frac{e^{\Lambda/2}}{\sqrt{\log z\log 2}},$$

另一方面根据(26)我们知道存在 $\varepsilon'>0$ 使得：

$$\frac{2}{e^{\Lambda}-1}=\frac{2}{e^{\tau/\kappa}-1}+\varepsilon'.$$

将这些结论结合起来，我们就得到了用于估计 $R_v(z)$ 的辅助工具：

引理 2.2. 倘若积性函数 $f(d)$ 满足：

$$\sum_{p<z}f(p)=O\left(\frac{z}{\log z}\right),$$

则对于所有的 $\varepsilon>0$，当 z 充分大时总有：

$$\sum_{d|P(z)}\chi_v(d)f(d)<z^{1+v+\frac{2}{e^{\tau/\kappa}-1}+\varepsilon}.$$

2.4 结论

现将引理 2.1和(21)相结合，就有：

定理 2.2 (Brun)**.** 若特征函数 $\chi_v(d)=1$ 当且仅当 d 满足(18)，且

$$R_v(z)=\sum_{d|P(z)}\chi_v(d)|r(d)|,$$

$$\eta_v(\tau)=\sum_{m\ge1}\frac{e^{m\tau}(m\tau)^{2m+v}}{(2m+v)!},$$

则当 $\mathcal{A}$ 满足命题 *2.1*和 $\Omega(\kappa)$，正数 τ 满足 $0<\tau^2e^{2+\tau}<4$，v_1 为正奇数，v_2 为非负偶数时

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)<XV(z)[1+\eta_{v_1}(\tau)]+R_{v_2}(z),$$

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)>XV(z)[1-\eta_{v_2}(\tau)]-R_{v_2}(z)$$

对所有充分大的 z 均成立。

2.5 Brun 筛法的应用

2.5.1 等差数列上的殆素数

当 $\mathcal{P}$ 表全体素数，$(a,q)=1$ 时，设置：

$$\mathcal{A}=\{n: n\le x, n\equiv a \pmod q\}$$

则筛函数 $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 计算的恰好就是 $\mathcal{A}$ 中不能被 $<z$ 素数整除的整数个数。结合命题 2.1我们不难发现：

$$X=\frac{x}{q},\quad g(d)=\begin{cases}0 & (d,q)>1\\ 1/d & (d,q)=1\end{cases},\quad |r(d)|\le 1.$$

因此有：

$$V(z)=\prod_{\substack{p<z\\ p\nmid q}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim\frac{q}{\varphi(q)}\frac{e^{-\gamma}}{\log z}.$$

此刻根据定理 2.2以及引理 2.2，可知 z 充分大时：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)>e^{-\gamma}[1-\eta_0(\tau)]\frac{x}{\varphi(q)\log z}-z^{1+\frac{2}{e^\tau-1}+\varepsilon}. \tag{29}$$

其中当 $\tau=0.52$ 时通过数值计算，得：

$$1-\eta_0(\tau)>1-0.79=0.21,\quad 1+\frac{2}{e^\tau-1}<1+2.94=3.94<4.$$

因此结合(29)，我们得知 x 充分大时总有：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},x^{1/4})>0.84e^{-\gamma}\frac{x}{\varphi(q)\log x}.$$

利用这个结论我们就可以发现大小 $\mathcal{A}$ 中不能被 $\le x^{1/4}$ 素数整除的整数个数满足：

$$>0.84e^{-\gamma}\frac{x}{\varphi(q)\log x}-x^{3/4}\gg\frac{x}{\varphi(q)\log x},$$

再结合抽屉原理我们就得改良的定理 1.1：

定理 2.3. *每个首项与公差互素的等差数列上都总有无穷个不超过 3 个素数的乘积。*

2.5.2 命题 9+9

设 $h \leq x$ 为一个非负偶数，并定义：

$$\mathcal{A} = \{n(n-h) : n \leq x\}$$

则结合命题 2.1，可知：

$$X = x, \quad g(p) = \begin{cases} 1 & p|h \\ 2 & p \nmid h \end{cases}, \quad |r(d)| \leq 2^{\omega(d)}.$$

并且 $x^{\varepsilon} \leq z \leq x$ 时：

$$\begin{aligned} V(z) &= \prod_{\substack{p<z \\ p|h}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p<z \\ p\nmid h}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \prod_{\substack{p|h \\ 2<p<z}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{2<p<z} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \sim \frac{c_h}{\log^2 z}, \end{aligned}$$

其中奇异级数 c_h 的定义为：

$$c_h = 2e^{-2\gamma} \prod_{\substack{p|h \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

这意味着 $g(d)$ 满足 $\Omega(2)$。另一方面，通过数值计算，可知 $\tau = 0.5027$ 时：

$$\eta_2(\tau) < 0.019, \quad \frac{2}{e^{\tau/2} - 1} < 6.999.$$

所以根据定理 2.2和引理 2.2可知：

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) &> [1 - \eta_2(\tau)] X V(z) - z^{3 + \frac{2}{e^{\tau/2} - 1}} \\ &> [1 - 0.019] \frac{c_h x}{\log^2 z} - z^{9.999}. \end{aligned}$$

此刻代入 $z = x^{1/10}$，便知当 x 充分大时：

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, x^{1/10}) > 98 \frac{c_h x}{\log^2 x} > 3. \tag{30}$$

这意味着对于每个非负偶数 h，存在 $x_h > 0$ 使得当 $x > x_h$ 时总可以找到 $1 < n < x$ 使 $|n-h|$ 没有 $\leq x^{1/10}$ 的素因子。当 $h = 2$ 时利用抽屉原理便知：

定理 2.4 (Brun). *存在无穷个整数 n 使 n 和 $n-2$ 的素因子个数不超过 9。*

另一方面，当 $h = x$ 为大偶数时，有：

定理 2.5 (Brun)**.** *每个大偶数都是两个不超过 9 个素数的乘积之和。*

定理 2.4和定理 2.5被统称为**命题 9+9**。

注释 2.3. 事实上 Brun 在原始论文 [1] 中只证明了 $S(\mathcal{A},\mathcal{P},x^{1/10}) > 0.4x/\log^2 x$，而本文中的加强结论(30)源自 Rademacher [5] 的改良。

2.5.3 孪生素数的倒数和

类似于之前研究的 9+9 问题，本节中我们依然考虑相同的集合:

$$\mathcal{A} = \{n(n-h) : n \le x\},$$

则有:

$$X = x, \quad g(p) = \begin{cases} 1 & p|h \\ 2 & p\nmid h \end{cases}, \quad |r(d)| \le 2^{\omega(d)}.$$

并且当 $x^{\varepsilon} < z \le x$ 时

$$V(z) \sim \frac{c_h}{\log^2 z}$$

通过数值计算，可知 $\tau = 0.503$ 时有:

$$\eta_3(\tau) < 0.0033, \quad \frac{2}{e^{u/2}-1} < 6.995.$$

因此根据定理 2.2和引理 2.2可知:

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) < [1+\eta_3(\tau)]XV(z) + z^{3+6.995} < 1.0033\frac{c_h x}{\log^2 z} + z^{10.995}.$$

现在代入 $z = x^{1/11}$，便能发现当 x 充分大时:

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},x^{1/11}) < 121.49\frac{c_h}{\log^2 x}.$$

因此用 $\pi_h(x)$ 表示满足以下条件的素数个数:

$$p \le x, p+h \text{ prime},$$

则由于 $p|P(z)$ 当且仅当 $p < z$，可知当 x 充分大时:

$$\pi_h(x) \le S(\mathcal{A},\mathcal{P},x^{1/11}) + x^{1/11} < 121.5\frac{c_h x}{\log^2 x}. \tag{31}$$

利用这一点，可得结论:

定理 2.6 (Brun)**.** 对于每个固定的偶数 h，所有满足 $p+h$ 为素数的素数 p 之倒数和收敛，换言之：

$$\sum_{\substack{p \\ p+h\ prime}} \frac{1}{p} < \infty.$$

Proof. 对于固定的 h，我们根据(31)可知：

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{y<p\le x \\ p+h \text{ prime}}} \frac{1}{p} &= \int_y^x \frac{\mathrm{d}\pi_h(t)}{t} = \frac{\pi_h(x)}{x} - \frac{\pi_h(y)}{y} + \int_y^x \frac{\pi_h(t)}{t^2}\mathrm{d}t \\ &\ll \frac{1}{\log^2 x} + \int_y^x \frac{\mathrm{d}t}{t\log^2 t} < \frac{1}{\log^2 y} + \frac{1}{\sqrt{\log y}}\int_y^x \frac{\mathrm{d}t}{t\log^{3/2} t} \\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\right),\end{aligned}$$

因此根据 Cauchy 准则可知级数收敛。 □

2.5.4 Brun–Titchmarsh 不等式

设 $(a,q)=1$，定义：

$$\mathcal{A} = \{n \le x : n \equiv a \pmod q\}$$

并用 $\mathcal{P}$ 表示全体素数，则 $\mathcal{A}$ 中的素数要么整除 $P(z)$ 要么就与 z 互素，所以：

$$\pi(x;q,a) \le S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) + z. \tag{32}$$

结合命题 2.1，可知：

$$X = \frac{x}{q}, \quad g(d) = \begin{cases} 0 & (d,q)>1 \\ 1 & (d,q)=1 \end{cases}, \quad |r(d)| \le 1,$$

这意味着：

$$V(z) = \prod_{\substack{p<z \\ p\nmid q}} \left(1-\frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\varphi(q)\log z}.$$

另一方面，通过数值计算可知 $\tau = 0.5$ 时：

$$\frac{2}{e^\tau - 1} < 3.083, \quad \eta_3(\tau) < 0.003,$$

于是根据定理 2.2和引理(2.2)可知当 z 充分大时：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) < [1+\eta_3(\tau)]\frac{x}{q}\frac{e^{-\gamma}}{\varphi(q)\log z} + z^{7.083}.$$

接着代入 $z=(x/q)^{1/7.09}$ 时，即得：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},x^{1/7.09})<1.003\cdot 7.09e^{-\gamma}\frac{x}{\varphi(q)\log(x/q)},$$

最后再结合(32)以及 $e^{-\gamma}<0.57$，即得 Brun–Titchmarsh 不等式：

定理 2.7 (Brun–Titchmarsh)**.** 当 x/q 充分大时：

$$\pi(x;q,a)<\frac{4.2x}{\varphi(q)\log(x/q)}.$$

注释 2.4. 这个结果最早是由 Titchmarsh [9] 在 1930 年用 Brun 筛法证明的，故称之为 **Brun–Titchmarsh 不等式**。

3 Selberg 上界筛法

在前一章节中，我们通过 Brun 筛法得到了若干数论量的上下界估计，但这些估计并不是最优的。在本文中，我们将引入 Selberg 方法 [7] 来优化上界筛法，而这些方法最初被用来研 Riemann ζ 函数的零点问题 [6]。

3.1 Selberg 的构造

不同于 Brun 的组合方法，Selberg 利用了平方的非负性构造了满足下列条件的实数列 λ_d：

$$\lambda_1 = 1, \quad d \geq \xi \Rightarrow \lambda_d = 0. \tag{33}$$

这意味着：

$$\left(\sum_{d|n} \lambda_d\right)^2 \geq \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}.$$

利用这一点，我们就能发现当 $\mathcal{A}_d$ 满足命题 2.1时有如下上界估计：

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) &\leq \sum_{a \in \mathcal{A}} \left(\sum_{d|(a,P(z))} \lambda_d\right)^2 = \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ d_1|a, d_2|a}} 1 \\ &= \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} |\mathcal{A}_{[d_1,d_2]}| \leq QX + R, \end{aligned}$$

其中：

$$Q = \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} g([d_1, d_2]), \tag{34}$$

$$R = \sum_{d_1,d_2|P(z)} |\lambda_{d_1}\lambda_{d_2} r([d_1, d_2])|. \tag{35}$$

通过后续的处理，Q 最终就会变成上界筛的主项，而 R 将变成误差项。

3.2 主项 Q 的计算

结合 $[d_1, d_2]$ 和 (d_1, d_2) 的定义，读者可以自证：

$$g([d_1, d_2])g((d_1, d_2)) = g(d_1)g(d_2),$$

于是(34)就可以改写成：

$$Q = \sum_{d_1,d_2|P(z)} \frac{1}{g((d_1, d_2))} \lambda_{d_1} g(d_1) \lambda_{d_2} g(d_2).$$

在此基础上，我们定义函数 $f(k)$:

$$\frac{1}{g(m)} = \sum_{k|m} f(k), \tag{36}$$

则有:

$$Q = \sum_{d_1,d_2|P(z)} \lambda_{d_1} g(d_1) \lambda_{d_2} g(d_2) \sum_{k|(d_1,d_2)} f(k) = \sum_{k|P(z)} f(k) y_k^2,$$

其中:

$$y_k = \sum_{\substack{d \\ k|d|P(z)}} \lambda_d g(d). \tag{37}$$

现在根据定理 5.2可知:

$$\lambda_d = \sum_{\substack{k \\ d|k|P(z)}} \mu\left(\frac{k}{d}\right) y_k. \tag{38}$$

结合(37)和(38)，我们发现 λ_d 满足(33)当且仅当:

$$\sum_{k|P(z)} \mu(k) y_k = 1, \quad k \geq \xi \Rightarrow y_k = 0, \tag{39}$$

因此结合 Cauchy–Schwarz 不等式，可知当

$$G = \sum_{\substack{k|P(z) \\ k<\xi}} \frac{1}{f(k)} \tag{40}$$

时，有:

$$1^2 = \left(\sum_{k|P(z)} \mu(k) y_k \right)^2 \leq QG. \tag{41}$$

最后对 y_k 进行仔细的选取，就有:

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \leq \frac{X}{G} + R.$$

然后我们就只需要估计 R 的大小了。

3.3 余项 R 的估计

很明显(41)取等当且仅当

$$y_k = \begin{cases} \mu(k)/f(k)G & k < \xi \\ 0 & k \geq \xi \end{cases},$$

故结合(38)可知:

$$\lambda_d g(d)=\frac{1}{G}\sum_{\substack{d|k|P(z)\\ k<\xi}}\mu\left(\frac{k}{d}\right)\frac{\mu(k)}{f(k)}=\frac{\mu(d)}{f(d)G}\sum_{\substack{m|P(z)\\ m<\xi/d\\ (m,d)=1}}\frac{1}{f(m)}. \tag{42}$$

另一方面，根据(40)可知:

$$\begin{aligned}G&=\sum_{r|d}\sum_{\substack{k|P(z)\\ k<\xi\\ (k,d)=r}}\frac{1}{f(k)}=\sum_{r|d}\frac{1}{f(r)}\sum_{\substack{m|P(z)\\ m<\xi/r\\ (m,r)=1\\ (mr,d)=r}}\frac{1}{f(m)}\\ &=\sum_{r|d}\frac{1}{f(r)}\sum_{\substack{m|P(z)\\ m<\xi/r\\ (m,d)=1}}\frac{1}{f(m)}\geq\frac{1}{f(d)}\underbrace{\sum_{r|d}f\left(\frac{d}{r}\right)}_{g(d)}\sum_{\substack{m|P(z)\\ m<\xi/d\\ (m,d)=1}}\frac{1}{f(m)},\end{aligned}$$

所以将这个结论与(42)相结合，就可以发现 $|\lambda_d|\leq 1$。于是(35)就可以化成:

$$\begin{aligned}R&\leq\sum_{\substack{d_1,d_2|P(z)\\ d_1,d_2<\xi}}|r([d_1,d_2])|=\sum_{d|P(z)}|r(d)|\sum_{\substack{d_1,d_2|P(z)\\ [d_1,d_2]=d\\ d_1,d_2<\xi}}1\\ &\leq\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}}|r(d)|\sum_{\substack{d_1,d_2|P(z)\\ [d_1,d_2]=d}}1=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}}3^{\omega(d)}|r(d)|.\end{aligned}$$

终于，我们可以整合这两节的成果物了。

3.4 结论

对(36)应用 Möbius 反演公式，可知 m 无平方因子时:

$$f(m)=\sum_{d|m}\frac{\mu(d)}{g(m/d)}=\frac{1}{g(m)}\prod_{p|m}(1-g(p))=\prod_{p|m}\frac{1-g(p)}{g(p)},$$

所以我们的结论就可以写成:

定理 3.1 (Selberg)**.** *若 $|\mathcal{A}_d|$ 满足命题 2.1，则对于所有的 $\xi>0$ 均有*

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)\leq\frac{X}{G(\xi,z)}+\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<\xi^2}}3^{\omega(d)}|r(d)|,$$

其中:

$$G(x,z)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<x}}h(d)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<x}}\prod_{p|d}\frac{g(p)}{1-g(p)}.$$

3.5 $G(x,z)$ 的平凡下界

$G(x,z)$ 的原始表达式比较难直接进行渐近展开，因此在本节中我们给一种估计 $G(x,z)$ 下界的简单办法。利用等比数列的求和公式，可知：

$$G(x,z)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<x}}\mu^2(d)h(d)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<x}}\prod_{p|d}\sum_{a\geq 1}[g(p)]^a,$$

所以当定义完全积性函数 $g_1(n)$ 满足 $g_1(p)=g(p)$，则有：

$$\begin{aligned}G(x,z)&=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<x}}\prod_{p|d}\sum_{a\geq 1}g_1(p^a)=\sum_{d}\sum_{\substack{n\geq 1\\ p|d\iff p|n}}g_1(n)\\&\geq\sum_{n<x}g_1(n)\sum_{\substack{d|P(z)\\ p|d\iff p|n}}1.\end{aligned}$$

由于 $n<z$ 时 n 的素因子必然 $<z$，所以：

引理 3.1. 设 $g_1(n)$ 为完全积性函数满足当 p 为素数时 $g_1(p)=g(p)$，则有：

$$G(x,z)\geq\sum_{n<\min(x,z)}g_1(n).$$

3.6 Selberg 筛法的应用

3.6.1 Brun–Titchmarsh 不等式的改良

设 $(a,q)=1$ 并定义

$$\mathcal{A}=\{n\leq x:n\equiv a\pmod q\},$$

则有：

$$X=\frac{x}{q},\quad g(d)=\begin{cases}0 & (d,q)>1\\ 1/d & (d,q)=1\end{cases},\quad |r(d)|\leq 1.$$

因此根据定理 3.1可知 $\xi=z$ 时：

$$\pi(x;q,a)\leq S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)+z\leq\frac{x}{qG}+R+z,\tag{43}$$

其中根据引理 3.1，可知 G 可取

$$G=\sum_{\substack{n<z\\ (n,q)=1}}\frac{1}{n}.$$

对于所有正整数 q，我们知道：

$$\begin{aligned}\frac{q}{\varphi(q)}G &= \prod_{p|q}\frac{1}{1-p^{-1}}\sum_{\substack{n<z\\(n,q)=1}}\frac{1}{n} = \sum_{\substack{n<z\\(n,q)=1}}\sum_{\substack{m\geq 1\\p|m\Rightarrow p|q}}\frac{1}{mn}\\&\geq \sum_{t<z}\frac{1}{t}\sum_{\substack{t=mn\\p|m\Rightarrow p|q\\p|n\Rightarrow p\nmid q}}1 = \sum_{t<z}\frac{1}{t}\end{aligned}$$

所以根据

$$\sum_{n<z}\frac{1}{n} > \log z,$$

可知

$$G = \sum_{\substack{n<z\\(n,q)=1}}\frac{1}{n} > \frac{\varphi(q)}{q}\log z.$$

对于余项，利用 $3^{\omega(d)}$ 的积性可知：

$$\begin{aligned}R &\leq z^2\sum_{d|P(z)}\frac{3^{\omega(d)}}{d} = z^2\prod_{p<z}\left(1+\frac{3}{p}\right)\\&\leq z^2\exp\left\{\sum_{p<z}\frac{3}{p}\right\} \ll z^2\log^3 z\end{aligned}$$

将这些结果代入回(43)中，可知：

$$\pi(x;q,a) < \frac{x}{\varphi(q)\log z} + O(z^2\log^3 z).$$

为了继续化简，我们设：

$$z = \left(\frac{x}{q}\right)^{1/2}\log^{-2}\left(\frac{x}{q}\right),$$

则有：

$$\log z = \frac{1}{2}\log\frac{x}{q} - 2\log\log\frac{x}{q}.$$

整合起来，就得到了优于定理 2.7的 Brun–Titchmarsh 不等式：

定理 3.2 (Brun–Titchmarsh)**.** 对于所有的 $x \geq q \geq 1$ 均有：

$$\pi(x;q,a) \leq \frac{2x}{\varphi(q)\log(x/q)}\left\{1 + O\left(\frac{\log\log(x/q)}{\log(x/q)}\right)\right\}.$$

将被筛的集合更换成 $\mathcal{A} = \{x < n \leq x+y : n \equiv a \pmod q\}$，我们还能得到区间上的 Brun–Titchmarsh 不等式：

定理 3.3 (Brun–Titchmarsh)**.** 对于所有的 $y \geq q \geq 1$ 均有：

$$\pi(x+y;q,a) - \pi(x;q,a) \leq \frac{2y}{\varphi(q)\log(y/q)}\left\{1 + O\left(\frac{\log\log(y/q)}{\log(y/q)}\right)\right\}.$$

3.6.2 孪生素数个数上界的改良

我们考虑集合

$$\mathcal{A} = \{n(n-h) : n \le x\},$$

则很明显对于所有 $z \ge 0$ 均有:

$$\pi_h(x) \le z + S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z). \tag{44}$$

而结合 $\mathcal{A}$ 本身的性质，不难发现:

$$X = x, \quad g(p) = \begin{cases} 1/p & p|h \\ 2/p & p \nmid h \end{cases}, \quad |r(d)| \le 2^{\omega(d)}.$$

现在套用定理 3.1，可知 $\xi = z$ 时:

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) < \frac{x}{G} + \sum_{\substack{d|P(z) \\ d<z^2}} 6^{\omega(d)}. \tag{45}$$

对于余项，简单放缩可知:

$$\sum_{\substack{d|P(z) \\ d<z^2}} 6^{\omega(d)} \le z^2 \sum_{d|P(z)} \frac{6^{\omega(d)}}{d} \ll z^2 \log^6 z$$

对于主项，当 h 固定、$s \to 0^+$ 时:

$$\begin{aligned}
\sum_{d \ge 1} \frac{\mu^2(d)h(d)}{d^s} &= \prod_p \left(1 + \frac{h(p)}{p^s}\right) \\
&= \prod_{p|h} \left(1 + \frac{1}{p^s(p-1)}\right) \prod_{p \nmid h} \left(1 + \frac{2}{p^s(p-2)}\right) \\
&= (1+2^{-s}) \prod_{\substack{p|h \\ p>2}} \frac{1+p^{-s}(p-1)^{-1}}{1+2p^{-s}(p-2)^{-2}} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{2}{p^s(p-2)}\right) \\
&\sim 2 \prod_{\substack{p|h \\ p>2}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{p>2} \left(1 + \frac{2}{p^s(p-2)}\right).
\end{aligned}$$

对于右侧的乘积，由于:

$$\sum_p \log\left(1 + \frac{2}{p^s(p-2)}\right) = \sum_p \frac{2}{p^s} + O\left(\sum_p \frac{1+p^s}{p^{2s+2}}\right), \tag{46}$$

所以有:

$$\prod_{p>2}\left(1+\frac{2}{p^s(p-2)}\right)\sim\prod_{p>2}\left(1+\frac{2}{p-2}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)^{-2}$$
$$=(1-2^{-s-1})^2\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^{s+1}}\right)^{-2}$$
$$\sim\frac{1}{4}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\zeta^2(s+1).$$

因此当 u_r 满足:

$$\sum_{r\geq 1}\frac{u_r}{r^s}=\frac{1}{\zeta^2(s+1)}\sum_{d\geq 1}\frac{\mu^2(d)h(d)}{d^s} \tag{47}$$

时根据(46)可知，(47)在 $s>-1/2$ 均绝对收敛。因此当 $\tau(n)$ 表示 n 的正因子个数时总有:

$$G=\sum_{d<z}\mu^2(d)h(d)=\sum_{r<z}u_r\sum_{n<z/r}\frac{\tau(n)}{n}$$
$$=\sum_{r<z}u_r\left[\sum_{k<z/r}\frac{1}{k}\sum_{m<z/rk}\frac{1}{m}\right]$$
$$=\sum_{r<z}u_r\left\{\sum_{k<z/r}\frac{1}{k}\left[\log\frac{z}{rk}+O(1)\right]\right\}$$
$$=\sum_{r<z}u_r\left[\log\frac{z}{r}\sum_{k<z/r}\frac{1}{k}-\sum_{k<z/r}\frac{\log m}{m}+O(1)\right]$$
$$=\sum_{r<z}u_r\left[\frac{1}{2}\log^2\frac{z}{r}+O(\log z)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\log^2 z\sum_{r<z}u_r+O\left\{\log z\sum_{r<z}|u_r|\log^2 r\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\log^2 z\sum_{r\geq 1}u_r+O(\log z)$$
$$=\frac{1}{4}\prod_{\substack{p|h\\p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log^2 z+O(\log z),$$

将 $z=x^{1/2}\log^{-11}$ 代入到(45)和(44)中，就有:

定理 3.4. 对于所有固定的正偶数 h，总有:

$$\pi_h(x)\leq\frac{16x}{\log^2 x}\prod_{\substack{p|h\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)+O\left(\frac{x\log\log x}{\log^3 x}\right).$$

3.6.3 Goldbach 问题的上界

在前一节中，我们通过 Dirichlet 级数展开法研究了被筛集合为

$$\mathcal{A} = \{n(n-h) : n \le x\}$$

时的筛函数 $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ 从而改良了之前对 $\pi_h(x)$ 的上界估计。但在由于当时的上界仅是对于固定 h 成立，所以对于 Goldbach 问题我们还是需要用初等方法得到对所有 h 一致成立的 $G(x)$ 展开式。

由前一节的推导可知：

$$h(p) = \begin{cases} 1/(p-1) & p|h \\ 2/(p-2) & p \nmid h \end{cases},$$

所以有：

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{d<x} \mu^2(d)h(d) = \sum_{k|h} \sum_{\substack{d<x \\ (d,h)=k}} \mu^2(d)h(d) \\ &= \sum_{k|h} \mu^2(k)h(k) \underbrace{\sum_{\substack{t<x/k \\ (t,h)=1}} \mu^2(t)h(t)}_{S}. \end{aligned}$$

为了估计 S，设积性函数 $u(m)$ 满足 $u(p) = p-2$，则交换求和次序可得：

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\substack{t<x/k \\ (t,h)=1}} \mu^2(t) \prod_{p|t} \frac{2}{p-2} = \sum_{\substack{t<x/k \\ (t,h)=1}} \frac{\mu^2(t)2^{\omega(t)}}{t} \prod_{p|t} \left(1 + \frac{2}{p-2}\right) \\ &= \sum_{\substack{t<x/k \\ (t,h)=1}} \frac{\mu^2(t)2^{\omega(t)}}{t} \sum_{m|t} \frac{\mu^2(m)2^{\omega(m)}}{u(m)} \\ &= \sum_{\substack{m<x/k \\ (m,h)=1}} \frac{\mu^2(m)4^{\omega(t)}}{u(m)m} \sum_{\substack{n<x/mk \\ (n,mh)=1}} \frac{\mu^2(n)2^{\omega(n)}}{n}. \end{aligned}$$

为了继续估计 S，我们代入定理 5.9，便有：

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{p}\right) \sum_{\substack{m<x/k \\ (m,h)=1}} \frac{\mu^2(m)4^{\omega(m)}}{u(m)m} \prod_{p|mh} \frac{p}{p+2} \log^2 \frac{x}{mk} \\ &\quad + O(\log x \log\log 3hx) + O\{(\log\log xh)^2\} \\ &= \frac{1}{2} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{p}\right) \prod_{p|h} \frac{p}{p+2} \prod_{p\nmid h} \left(1 + \frac{4}{p^2-4}\right) \log^2 \frac{x}{k} \\ &\quad + O(\log x \log\log 3hx) + O\{(\log\log 3xh)^2\}. \end{aligned}$$

化简乘积可知:

$$
\begin{aligned}
&\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2}\left(1+\frac{2}{p}\right)\prod_{p|h}\frac{p}{p+2}\prod_{p\nmid h}\left(1+\frac{4}{p^2-4}\right)\\
&=\frac{1}{4}\prod_{p>2}\frac{(1-p)^2}{p^2}\frac{p+2}{p}\frac{p^2}{p^2-4}\prod_{\substack{p|h\\p>2}}\frac{p}{p+2}\frac{p^2-4}{p^2}\\
&=\frac{1}{4}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\prod_{\substack{p|h\\p>2}}\frac{p-2}{p},
\end{aligned}
$$

所以有:

$$
\begin{aligned}
S=&\frac{1}{8}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\prod_{\substack{p|h\\p>2}}\frac{p-2}{p}\log^2\frac{x}{k}\\
&+O(\log x\log\log 3hx)+O\{(\log\log 3xh)^2\}.
\end{aligned}
$$

为了继续将 S 代入到 $G(x)$ 中进行计算，我们需要先估计下面这种形式的和:

$$
T_n(h)=\sum_{k|h}\mu^2(k)h(k)\log^n k.
$$

其中很明显 $T_0(h)=h/\varphi(h)$，而 $n\geq 1$ 时:

$$
\begin{aligned}
T_n(h)&=\sum_{k|h}\mu^2(k)h(k)\log^{n-1}k\sum_{p|k}\log p\\
&=\sum_{p|h}\log p\sum_{\substack{k\\p|k|h}}\mu^2(k)h(k)\log^{n-1}k\\
&=\sum_{p|h}h(p)\log p\sum_{t|h/(p,h)}\mu^2(t)h(t)\log^{n-1}(pt)\\
&=\sum_{p|h}h(p)\log p\sum_{t|h/(p,h)}\mu^2(t)h(t)\sum_{0\leq r\leq n-1}\binom{n-1}{r}\log^r t\log^{n-1-r}p\\
&=\sum_{0\leq r\leq n-1}\binom{n-1}{r}T_r\left(\frac{h}{(p,h)}\right)\sum_{p|h}h(p)\log^{n-r}p.
\end{aligned}
$$

由于 $p|h$ 时总有 $h(p)=1/(p-1)$，所以当 n 固定时总有:

$$
\begin{aligned}
T_n(h)&\ll\sum_{0\leq r\leq n-1}\binom{n-1}{r}T_r(h)\sum_{p|h}\frac{\log^{n-r}p}{p}\\
&\ll\sum_{0\leq r\leq n-1}T_r(h)(\log\log 3h)^{n-r}.
\end{aligned}
$$

由此可知对于所有的 $n \geq 0$，均存在 $C_n > 0$ 使得：

$$T_n(h) < C_n \frac{h}{\varphi(h)} (\log\log 3h)^n.$$

将这个结果与 S 和 $G(x)$ 结合，我们就得到了最终的展开式：

$$\begin{aligned} G(x) = &\frac{1}{4} \prod_{p>2} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \prod_{\substack{p \mid h \\ p>2}} \frac{p-2}{p-1} \log^2 x \\ &+ O\left(\frac{h}{\varphi(h)} \log x \log\log 3hx \right) + O\left\{ \frac{h}{\varphi(h)} (\log\log 3hx)^2 \right\}. \end{aligned}$$

现在用 $r_x(a,b)$ 表示将偶数 x 分解成一个不超过 a 个素数的乘积与一个不超过 b 个素数的乘积之和的方法数时，则根据 $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ 的定义可知：

$$r_x(1,1) \leq S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, x^{1/2}) + 2x^{1/2}.$$

再将其与定理 3.1和 $G(x)$ 的展开式结合，便有：

定理 3.5. 当 x 为大偶数时，总有：

$$r_x(1,1) < \frac{16x}{\log^2 x} \prod_{\substack{p \mid x \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) + O\left\{ \prod_{\substack{p \mid x \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \frac{\log\log x}{\log^3 x} \right\}.$$

4 Selberg 筛法的解析形式

在前一章中，我们用 Selberg 筛法探究了若干具体的数论问题。在确定这些具体数论问题的主项时，我们对 $G(x,z)$ 进行了渐近展开：

$$G(x,z)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<x}}h(d)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<x}}\prod_{p|d}\frac{g(p)}{1-g(p)} \tag{48}$$

在研究 Brun–Titchmarsh 不等式的过程中，我们通过引理 3.1简化 $G(x,z)$ 的结构从而给出其渐近下界。而在孪生素数问题和 Goldbach 问题当中，$G(x,z)$ 的估计过程就变得相对困难起来了。因此在本章中我们将从解析的角度出发来探究 $G(x,z)$ 的性质从而将上述的估计过程变得简单。

4.1 $G(x,z)$ 的简单上界

如果我们现在先不考虑 $d<x$ 这个求和条件，则可以发现 $G(x,z)$ 和 $V(z)$ 具有紧密的联系：

$$G(x,z)\le\sum_{d|P(z)}h(d)=\prod_{p<z}\left(1+\frac{g(p)}{1-g(p)}\right)=\frac{1}{V(z)}.$$

因此我们有理由猜测 $G(x,z)$ 和 $V(z)$ 之间满足关系：

$$\frac{1}{G(x,z)}=\frac{V(z)}{1-\Delta},$$

其中：

$$\Delta=1-V(z)G(x,z)=V(z)\sum_{\substack{d|P(z)\\ d\ge x}}h(d) \tag{49}$$

4.2 Rankin 方法的应用

本质上，Rankin 方法就是通过引入积性函数来刻画某些求和条件从而估计特定和式的上界：

$$\sum_{d\in\mathcal{S}}a_d\le\sum_d a_d f_{\mathcal{S}}(d,s),$$

其中通过对参数 s 进行巧妙的选取就可以使最右侧的和式取得极小值，从而得到紧密的上界估计。对于集合 $\mathcal{S}=\{d:d\ge x\}$，我们就可以设置 $s>0, f_{\mathcal{S}}(d,s)=(d/x)^s$。由

此可见 Δ 满足:

$$\begin{aligned}\Delta &\le V(z)x^{-s}\sum_{d|P(z)}h(d)d^s = x^{-s}\prod_{p<z}\frac{1+h(p)p^s}{1+h(p)}\\ &\le x^{-s}\prod_{p<z}\left(1+\frac{h(p)p^s}{1+h(p)}\right) = x^{-s}\prod_{p<z}(1+g(p)p^s)\\ &\le \exp\left\{-s\log x+\sum_{p<z}g(p)p^s\right\}.\end{aligned}$$

现在我们假设 $g(p)$ 满足 $\Omega(\kappa)$ 条件，则存在 $M>0$ 使得 $z\ge w\ge 2$ 时总有:

$$T(w,z)=\sum_{w\le p<z}g(p)\le\kappa\log\frac{\log z}{\log w}+\frac{M}{\log w},$$

所以有:

$$\begin{aligned}&\sum_{p<z}g(p)p^s-\int_2^z t^s\left\{\frac{\kappa}{t\log t}+\frac{M}{t\log^2 t}\right\}\mathrm{d}t\\ &\qquad=\int_z^2 t^s\mathrm{d}\left\{T(t,z)-\kappa\log\frac{\log z}{\log t}-\frac{M}{\log t}\right\}\le\frac{Mz^s}{\log z},\end{aligned}$$

因此有:

$$\sum_{p<z}g(p)p^s\le\kappa\int_2^z\frac{t^{s-1}}{\log t}\mathrm{d}t+O\left(\frac{z^s}{\log z}\right)\ll\frac{z^s}{\log z^s}+\frac{z^s}{\log z}.$$

现在设置 $\lambda=s\log z$，则有:

$$\log\Delta\le-\lambda\frac{\log x}{\log z}+O\left(\frac{e^\lambda}{\lambda}+\frac{e^\lambda}{\log z}\right)$$

现在设置 $u=\log x/\log z, e^\lambda=u\log u$ 便得结论:

$$\log\Delta\le-u\log u-u\log\log u+O(u)+O\left(\frac{u\log u}{\log z}\right).$$

由于 $d|P(z)\Rightarrow d<z^z$，所以当 $u>z$ 时显然有 $V(z)G(x,z)=1$。因此我们真正需要估计 Δ 得情形中 $u\le z$。将此上界与(49)结合，便有:

$$\frac{1}{G(x,z)}\le V(z)[1+\exp(-u\log u-u\log\log u+O(u))].$$

最后再结合定理 3.1，我们就得到了 Selberg 筛法的第一种解析上界:

定理 4.1. 在条件 $\Omega(\kappa)$ 下，当 $z\ge 2$ 时总有:

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)<XV(z)[1+\exp(-u\log u-u\log\log u+O(u))]+\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<z^{2u}}}3^{\omega(d)}|r(d)|.$$

4.3 $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 的渐近公式

利用 Buchstab 迭代公式中，我们就可以将上一节的结果用来估计 $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 的下界。根据定理 4.1可知存在固定常数 $A>0$ 使得当 p 表素数时总有：

$$S(\mathcal{A}_p,\mathcal{P},p)<g(p)XV(p)[1+\exp(-u_p\log u_p-Au_p)]+\sum_{\substack{d|P(p)\\ d<p^{2u_p}}}3^{\omega(d)}|r(pd)|.$$

这意味着：

$$\begin{aligned}&\sum_{p<z}[S(\mathcal{A}_p,\mathcal{P},p)-g(p)V(p)X]\\ &\quad<\frac{1}{XV(z)}\underbrace{\sum_{p<z}\frac{V(p)}{V(z)}g(p)\exp(-u_p\log u_p-Au_p)}_{Q}\\ &\quad+\underbrace{\sum_{p<z}\sum_{\substack{d|P(p)\\ d<p^{2u_p}}}3^{\omega(d)}|r(pd)|}_{R}.\end{aligned}$$

结合 Selberg 筛法的原始误差项，我们希望

$$R\le\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<z^{2u}}}3^{\omega(d)}|r(d)|,$$

因此我们要求 $p^{2u_p}=z^{2u}/p$，即 $u_p=u\frac{\log z}{\log p}-\frac{1}{2}>u-\frac{1}{2}$。因此剩下的任务就是估计 Q 的上界了。利用条件 $\Omega(\kappa)$，可知

$$Q\ll\sum_{p<z}g(p)\left(\frac{\log z}{\log p}\right)^{\kappa}\exp(-u_p\log u_p-Au_p)=\sum_{p<z}g(p)\frac{\log p}{\log z}e^{-m(p)},$$

其中：

$$m(p)=u_p\log u_p+Au_p-(\kappa+1)\log\frac{\log z}{\log p}.$$

现在我们假设 p 是连续变量，则求导可知：

$$\begin{aligned}m'(p)&=(\log u_p+A+1)\frac{\mathrm{d}u_p}{dp}+\frac{\kappa+1}{p\log p}=-(\log u_p+A+1)\frac{u\log z}{p\log^2 p}+\frac{\kappa+1}{p\log p}\\ &<\frac{\kappa+1-u(\log u_p+A+1)}{p\log p}<\frac{\kappa+1-u(\log(u-\frac{1}{2})+A+1)}{p\log p}.\end{aligned}$$

这表明当 u 充分大时 $m(p)$ 单调递减。这意味着：

$$\begin{aligned}
Q &\ll \sum_{p<z} g(p)e^{-m(z)} \ll \sum_{p<z} g(p)\frac{\log p}{\log z}\exp\left\{-\left(u-\frac{1}{2}\right)\log\left(u-\frac{1}{2}\right)-Au\right\}\\
&= \exp\left\{-u\log u+\int_{u-\frac{1}{2}}^{u}[\log t+1]\mathrm{d}t-Au\right\}\frac{1}{\log z}\int_z^2 \log t\mathrm{d}T(t,z)\\
&\le \exp\left\{u\log u+\frac{1}{2}\log u-(A-1)u\right\}\times\left\{\frac{1}{\log z}\int_z^2 \log t\mathrm{d}\left[\kappa\log\frac{\log z}{\log t}+\frac{M}{\log t}\right]+M\right\}\\
&\ll \exp(-u\log u-A'u),
\end{aligned}$$

其中 $0<A'<A-1$。最后根据 Buchstab 迭代式，可知

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) &= |\mathcal{A}|-\sum_{p<z} S(\mathcal{A}_p,\mathcal{P},z)\\
&> X\left(1-\sum_{p<z} g(p)V(p)\right)-XV(z)Q-R,
\end{aligned}$$

由于当 $2=p_1<p_2<\cdots<p_r<z$ 表所有 $[2,z)$ 内素数时总有：

$$\begin{aligned}
V(z) &= (1-g(p_r))V(p_r) = V(p_r)-g(p_r)V(p_r)\\
&= V(p_1)-\sum_{1\le i\le r} g(p_i)V(p_i) = 1-\sum_{p<z} g(p)V(p),
\end{aligned}$$

所以将本节的所有结论与定理 4.1相结合，便得 $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ 的渐近公式：

定理 4.2. 对于所有的固定常数 $A>0$，在条件 $\Omega(\kappa)$ 下，当 z,u 充分大时总有：

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = XV(z)[1+O\{\exp(-u\log u-Au)\}]+\theta\sum_{\substack{d|P(z)\\ d<z^{2u}}} 3^{\omega(d)}|r(d)|.$$

其中 $-1\le\theta\le 1$。

由于定理 4.2可以快速地给出一些数论量的粗糙估计，所以这个结论也常常被称为**筛法基本引理（fundamental lemma of sieve theory）**。

5 附录

本节旨在推导本讲义中涉及到的诸多辅助结论。

5.1 Dirichlet 卷积

对于数论函数 $f(n), g(n)$，我们定义：

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right), \tag{50}$$

则称 $(f * g)(n)$ 为 $f(n)$ 与 $g(n)$ 的 **Dirichlet 卷积**。

事实上，Dirichlet 卷积和 Dirichlet 级数有着密切的关系，现在设 $h(n) = (f * g)(n)$ 则有：

$$\sum_{m \geq 1} \frac{f(m)}{m^s} \sum_{k \geq 1} \frac{g(k)}{k^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{h(n)}{n^s}. \tag{51}$$

通过(51)，我们就可以立即得到若干个 Dirichlet 卷积的性质：

命题 5.1. 用(50)定义 $f * g$，则当 $f(n), g(n), h(n)$ 为数论函数时：

- $f * g = g * f$,
- $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- 若 $f(n), g(n)$ 为积性函数，则 $(f * g)(n)$ 亦为积性函数。

5.2 Möbius 反演

对于积性函数 $\mu(n)$，我们要求当 p 为素数时：

$$\mu(p^k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -1 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases},$$

则称 $\mu(n)$ 为 **Möbius 函数**。利用 Dirichlet 卷积的性质，我们可以立即得到：

引理 5.1. 当 $f(n)$ 为积性函数时：

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{p|n} (1 - f(p)).$$

利用这一点，我们就可以得到 Möbius 反演公式了：

定理 5.1 (Möbius 反演公式). 对于数论函数 $f(n)$，定义：

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d),$$

则有：

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Proof. 现在设：

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n>1\end{cases},$$

则根据引理 5.1可知：

$$\delta(n)=\sum_{d|n}\mu(d). \tag{52}$$

因此利用 Dirichet 卷积的结合律得：

$$f=\delta*f=(\mu*1)*f=\mu*(1*f)=\mu*g.$$

故定理得证。 □

事实上定理 5.1是最标准的一种 Möbius 反演，在筛法的研究中我们还会使用一个 Möbius 反演的变种：

定理 5.2. 对于数论函数 $f(n)$，设：

$$g(k)=\sum_{\substack{d\in\mathcal{D}\\ k|d}}f(d),$$

其中 $\mathcal{D}\subset\mathbb{Z}^+$ 满足：

$$d\in\mathcal{D},k|d\Rightarrow k\in\mathcal{D},$$

则有：

$$f(d)=\sum_{\substack{k\in\mathcal{D}\\ d|k}}\mu\left(\frac{k}{d}\right)g(k).$$

Proof. 利用(52)，易知：

$$f(d)=\sum_{\substack{k\in\mathcal{D}\\ d|k}}\delta\left(\frac{k}{d}\right)f(k)=\sum_{\substack{k\in\mathcal{D}\\ d|k}}f(k)\sum_{m|(k/d)}\mu(m).$$

对于最右侧和式，设 $q = md$ 则有：

$$\begin{aligned} f(d) &= \sum_{\substack{k\in\mathcal{D} \\ d|k}} f(k) \sum_{\substack{q\in\mathcal{D} \\ d|q|k}} \mu\left(\frac{q}{d}\right) = \sum_{\substack{q\in\mathcal{D} \\ d|q}} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \sum_{\substack{k\in\mathcal{D} \\ q|k}} f(k) \\ &= \sum_{\substack{q\in\mathcal{D} \\ d|q}} \mu\left(\frac{q}{d}\right) g(q), \end{aligned}$$

故定理得证。 □

5.3 分部求和法

在解析数论中我们常常会处理此类和式：

$$\sum_{n\le x} c_n f(n), \tag{53}$$

其中 c_n 是复数列，而 $f(x)$ 一般是一个解析性质良好的函数。为了高效地分析这类和式的渐近性质，我们常常会定义 c_n 的部分和：

$$C(x) = \sum_{n\le x} c_n,$$

从而能够优雅地处理(53)。

当 $N = \lfloor x \rfloor$ 时：

$$\sum_{n\le x} c_n f(n) = \sum_{n\le N} [C(n) - C(n-1)] f(n) \tag{54}$$

$$= C(N)f(N) - \sum_{n\le N-1} C(n)[f(n+1) - f(n)]. \tag{55}$$

如果 $f(x)$ 在区间 $[1, x]$ 上具有连续导数，则可以将后面的式子更换成积分：

$$\sum_{n\le N-1} C(n)[f(n+1) - f(n)] = \sum_{n\le N-1} C(n) \int_n^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t \tag{56}$$

$$= \sum_{n\le N-1} \int_n^{n+1} C(t)f'(t)\mathrm{d}t \tag{57}$$

$$= \int_1^N C(t)f(t)\mathrm{d}t \tag{58}$$

$$= C(x)f(x) - C(N)f(N) + \int_1^x C(t)f'(t)\mathrm{d}t. \tag{59}$$

将此结论向上回代，即得：

定理 5.3 (分部求和法). 当 $\{c_n\}_{n\geq 1}$ 为复数列、$f(x)\in C^1[1,x]$ 时总有:

$$\sum_{n\leq x} c_n f(n) = C(x)f(x) - \int_1^x C(t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

其中:

$$C(x) = \sum_{n\leq x} c_n.$$

当然很多时候我们也会用差分形式的分部求和法来研究小区间和式的渐近性质:

推论 5.1. 当 $\{c_n\}_{n\geq 1}$ 为复数列、$f(x)\in C^1[a,b]$ 时总有:

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = C(b)f(b) - C(a)f(a) - \int_a^b C(t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

其中:

$$C(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n.$$

注释 5.1. 事实上 Riemann–Stieltjes 积分可以直接用来处理(53)。

5.4 阶乘的初等性质

在筛法中我们经常要对出现在分母上的阶乘进行放缩。虽然我们有 Stirling 公式来描绘其渐近性质:

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \left\{1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right\},$$

但是为了做精密的数值估计，我们需要得到适用于阶乘的严格不等式。因此在本节中我们将对其进行推导。

对阶乘取对数，则通过积分放缩法可知其具有下界:

$$\sum_{n\leq N}\log n \geq \sum_{n\leq N}\int_{n-1}^n \log t\mathrm{d}t = \int_0^N \log t\mathrm{d}t \tag{60}$$

$$= N\log N - N = \log\frac{N^N}{e^N}. \tag{61}$$

于是:

定理 5.4. 对于所有的 $N\in\mathbb{Z}^+$，恒成立:

$$\frac{1}{N!} \leq \left(\frac{e}{N}\right)^N.$$

另一方面，再根据

$$\log n \geq \int_{n-1}^n \log t\mathrm{d}t,$$

我们还可以得到:

推论 5.2. 对于所有的 $N\in\mathbb{Z}^+$，函数 $N^N e^{-N}/N!$ 单调递减。

5.5 “核武器”引理

在本讲义的诸多场景里我们都会要估计下面这种形式的和:

$$\sum_{w\le p<z} g(p)F(p),$$

其中 $g(d)$ 是用于描述“密度”的积性函数而 $F(x)$ 是一个解析性质良好的函数。根据 Mertens 第二定理，我们知道:

$$\sum_{w\le p<z}\frac{1}{p}=\log\frac{\log z}{\log w}+O\left(\frac{1}{\log w}\right).$$

因此我们可以结合之前对筛法维度的描述来假设 $g(p)$ 满足:

$$T(w,z)=\sum_{w\le p<z} g(p)=\kappa\log\frac{\log z}{\log w}+O\left(\frac{L}{\log w}\right).$$

利用这一点，我们就可以发现当 $F(x)$ 有界变差且在 $[w,z]$ 上满足 $|F(x)|\le M$ 时:

$$\begin{aligned}
\sum_{w\le p<z} g(p)F(p) &= \int_w^z F(t)\mathrm{d}T(w,t) && (62)\\
&= \kappa\int_w^z \frac{F(t)}{t\log t}\mathrm{d}t+\int_w^z F(t)\mathrm{d}O\left(\frac{L}{\log w}\right) && (63)\\
&= \kappa\int_w^z \frac{F(t)}{t\log t}\mathrm{d}t+O\left(\frac{LM}{\log w}\right) && (64)\\
&\quad +O\left\{\frac{L}{\log w}\int_w^z |\mathrm{d}F(t)|\right\}. && (65)
\end{aligned}$$

在此基础上假设 $F(x)$ 单调，即得结论:

引理 5.2 (核武器)**.** *当 $F(x)$ 是 $[w,z]$ 上单调的有界变差函数，且存在固定的 κ 使数论函数 $g(n)$ 满足:*

$$\sum_{w\le p<z} g(p)=\kappa\log\frac{\log z}{\log w}+O\left(\frac{L}{\log w}\right),$$

则有:

$$\sum_{w\le p<z} g(p)F(p)=\kappa\int_w^z \frac{F(t)}{t\log t}\mathrm{d}t+O\left\{\frac{L}{\log w}(|F(z)|+|F(w)|)\right\}.$$

5.6 常用的渐近展开式

在本节中，我们将研究一些形如:

$$S(x,q;f)=\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}} f(n)$$

的和式从而得到 Selberg 筛法主项 $G(x,z)$ 在特定情形的渐近公式。

5.6.1 基础展开式

利用 Möbius 函数，我们可以轻易将条件 $(n,q)=1$ 用下面的特征函数来表述：

$$\sum_{d|(n,q)} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n,q)=1 \\ 0 & (n,q)>1 \end{cases}. \tag{66}$$

利用这一点就可以研究一些基础情形的 $S(x,q;f)$ 了：

定理 5.5. 当 $x,q\geq 1$ 时总有：

$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,q)=1}} \frac{1}{n} = \frac{\varphi(q)}{q}\log x + O(\log\log 3q).$$

Proof. 利用(66)可知：

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leq x\\(n,q)=1}} \frac{1}{n} &= \sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\sum_{d|(n,q)}\mu(d) = \sum_{d|q}\mu(d)\sum_{\substack{n\leq x\\d|n}}\frac{1}{n}\\ &= \sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{t\leq x/d}\frac{1}{t} = \sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\left[\log\frac{x}{d}+O(1)\right].\end{aligned}$$

当 $1\leq u\leq x$ 时很明显有：

$$\begin{aligned}\sum_{d|q}\frac{\mu^2(d)}{d} &\leq \sum_{d\leq u}\frac{1}{d} + \sum_{\substack{d|q\\d>u}}\frac{\mu^2(d)}{d}\\ &< \sum_{d\leq u}\frac{1}{u} + \frac{\omega(q)}{u} \ll \log u + \frac{\log q}{u}.\end{aligned}$$

代入 $u=\log 3q$ 即得：

$$\sum_{d|q}\frac{\mu^2(d)}{d} \ll \log\log 3q. \tag{67}$$

另一方面，通过交换求和次序可知：

$$\begin{aligned}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\log d &= \sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{p|d}\log p = \sum_{p|q}\log p \left.\sum_{\substack{d\\p|d|q}}\frac{\mu(d)}{d}\right\} d=pt\\ &= -\sum_{p|q}\frac{\log p}{p}\sum_{\substack{t|q\\p\nmid t}}\frac{\mu(t)}{t} = -\sum_{p|q}\frac{\log p}{p}\prod_{\substack{p'|q\\p'\neq p}}\left(1-\frac{1}{p}\right),\end{aligned}$$

最后利用欧拉函数的性质，我们就得到了：

$$\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\log d = -\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}. \tag{68}$$

类似于(67)的推导，我们可以根据 Mertens 第一定理得知：

$$\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}\ll\sum_{p\le\log 3q}\frac{\log p}{p}+\frac{1}{\log 3q}\sum_{p|q}\log p\ll\log\log 3q.$$

最后将这些渐近估计整合在一起就是结论。 □

类似的，我们也可以得到 $f(n)=\log n/n$ 情形的展开，但由于 $\log n$ 是加性的所以处理起来需要更加仔细一些。

定理 5.6. 当 $x,q\ge 1$ 时总有：

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\log n}{n}=\frac{1}{2}\frac{\varphi(q)}{q}\log^2 x+O\{(\log\log 3q)^2\}.$$

Proof. 类似于对定理5.5的推导，我们引入(66)，则有：

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\log n}{n}=\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{t\le x/d}\frac{\log td}{t}.$$

利用 Euler–Maclaurin 公式，可知：

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x/d}\frac{\log td}{t}&=\frac{1}{2}\log^2\frac{x}{d}+\log d\log\frac{x}{d}+O(\log d)\\&=\frac{1}{2}\log^2 x-\frac{1}{2}\log^2 d+O(\log d).\end{aligned}$$

很明显，利用 Euler–Maclaurin 公式可知 $u=\log 3q$ 时：

$$\sum_{d|q}\frac{\mu^2(d)}{d}\log d\ll\sum_{d\le u}\frac{\log d}{d}+\frac{\log q}{u}\ll(\log\log 3q)^2,$$

另一方面，类似于对(68)的推导，我们可以通过交换求和次序得到：

$$\begin{aligned}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\log^2 d&=-\sum_{p|q}\frac{\log p}{p}\sum_{\substack{t|q\\p\nmid t}}\frac{\mu(t)}{t}\log pt\\&=-\sum_{p|q}\frac{\log^2 p}{p}\sum_{t|q/(p,q)}\frac{\mu(t)}{t}-\sum_{p|q}\frac{\log p}{p}\sum_{t|q/(p,q)}\frac{\mu(t)}{t}\log t\\&=-\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{p|q}\frac{\log^2 p}{p-1}+O\left\{\sum_{p|q}\frac{\log p}{p}\log\log 3q\right\}\\&\ll(\log\log 3q)^2+\sum_{p\le u}\frac{\log^2 p}{p}+\frac{\log q\log u}{u}\\&\ll(\log\log 3q)^2+\log^2 u+\frac{\log q\log u}{u}\ll(\log\log 3q)^2.\end{aligned}$$

将这些估计结合在一起，我们就得到了定理中的渐近公式。 □

至此我们已经完成了 $S(x,q;f)$ 估计问题中的基础展开公式的推导。在接下来的渐近问题中，我们不再使用(66)作为推导的起点，而是直接将 $S(x,q;f)$ 化成能套用定理5.5和5.6的形式来进行研究。

5.6.2 对无平方因子数求和

根据定义，我们知道 Möbius 函数的平方恰好就能作无平方因子数的特征函数，所以本节实质上就是在研究这样的和：

$$S(x,q;\mu^2 f)=\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\mu^2(n)f(n).$$

利用 Dirichlet 卷积的性质，我们发现：

$$\sum_{d^k|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & n\ k\\ 0\end{cases}\tag{69}$$

故将(69)和上一节的结论结合，我们就能得到适用于无平方因子数的基础展开式了：

定理 5.7. 当 $x,q\ge 1$ 时总有：

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\mu^2(n)}{n}=\frac{\varphi(q)}{q}\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\log x+O(\log\log 3q).$$

Proof. 代入(69)可知：

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\mu^2(n)}{n}=\sum_{\substack{k\le\sqrt{x}\\(k,q)=1}}\frac{\mu(k)}{k^2}\sum_{\substack{t\le x/k^2\\(t,q)=1}}\frac{1}{t}.$$

现在再套用定理5.5，便得：

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\mu^2(n)}{n}&=\sum_{\substack{k\le\sqrt{x}\\(k,q)=1}}\frac{\mu^2(k)}{k^2}\left[\frac{\varphi(q)}{q}\log\frac{x}{k^2}+O(\log\log 3q)\right]\\&=\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{\substack{k\le x\\(k,q)=1}}\frac{\mu(k)}{k^2}\log x+O(\log\log 3q).\end{aligned}$$

根据 Dirichlet 级数的 Euler 乘积公式，可知：

$$\sum_{\substack{k\ge 1\\(k,q)=1}}\frac{\mu(k)}{k^2}=\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right),$$

又因为

$$\left|\sum_{\substack{k>x\\(k,q)=1}}\frac{\mu(k)}{k^2}\right|\le\sum_{k>x}\frac{1}{k^2}=O\left(\frac{1}{x}\right),$$

所以代入回上面的展开式里，我们就完成了证明。 □

定理 5.8. 当 $x,q\ge 1$ 时总有：

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\mu^2(n)}{n}\log n=\frac{1}{2}\frac{\varphi(q)}{q}\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O(\log x)+O\{(\log\log 3q)^2\}.$$

Proof. 代入(69)和定理5.6可知：

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\mu^2(n)}{n}\log n&=\sum_{\substack{k\le\sqrt{x}\\(k,q)=1}}\frac{\mu^2(k)}{k^2}\sum_{\substack{t\le x/k^2\\(t,q)=1}}\frac{\log tk^2}{t}\\&=\sum_{\substack{k\le\sqrt{x}\\(k,q)=1}}\frac{\mu^2(k)}{k^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\varphi(q)}{q}\log\frac{x}{k^2}+O\{(\log\log 3q)^2\}\right]\\&+\sum_{\substack{k\le\sqrt{x}\\(k,q)=1}}\frac{\mu^2(k)}{k^2}O\left\{\sum_{t\le x}\frac{\log k}{t}\right\}.\end{aligned}$$

最后利用调和数的性质便可得到结论。 □

5.6.3 Shapiro–Warga 渐近公式

在本节中我们将运用前面得到的结论来证明 Shapiro 和 Warga [8] 得到的渐近公式：

定理 5.9 (Shapiro–Warga)**.** 当 $x,q\ge 1$ 时总有：

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\mu^2(n)2^{\omega(n)}}{n}&=\frac{1}{2}\prod_{p|q}\frac{p}{p+2}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\left(1+\frac{2}{p}\right)\log^2 x\\&+O(\log x\log\log 3qx)+O\{(\log\log 3q)^2\}.\end{aligned}$$

Proof. 当 n 无平方因子的时候 $2^{\omega(n)}$ 恰好就是 n 的正因子个数，故有：

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\mu^2(n)2^{\omega(n)}}{n}&=\sum_{\substack{k\le x\\(k,q)=1}}\frac{\mu^2(k)}{k}\sum_{\substack{t\le x/k\\(t,kq)=1}}\frac{\mu^2(t)}{t}\\&=S_1\log x-S_2+S_3,\end{aligned}$$

其中由定理5.7可知：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{\substack{k\le x\\(k,q)=1}} \frac{\mu^2(k)\varphi(k)}{k^2} \prod_{p\nmid kq}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\\
&= \frac{\varphi(q)}{q} \prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \sum_{\substack{k\le x\\(k,q)=1}} \mu^2(k) \prod_{p|k}\frac{p-1}{p^2-1}\\
&= \frac{\varphi(q)}{q} \prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \underbrace{\sum_{\substack{k\le x\\(k,q)=1}} \frac{\mu^2(k)}{k} \prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{u(k)}\right)}_{S_4},
\end{aligned}
$$

其中积性函数 $u(k)$ 满足 $u(p)=p+1$。交换求和次序，便可再次利用定理5.7得到：

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{\substack{k\le x\\(k,q)=1}} \frac{\mu^2(k)}{k} \sum_{r|k}\frac{\mu(r)}{u(r)} = \sum_{\substack{r\le x\\(r,q)=1}} \frac{\mu(r)}{u(r)r} \sum_{\substack{t\le x/r\\(t,rq)=1}} \frac{\mu^2(t)}{t}\\
&= \frac{\varphi(q)}{q} \prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \sum_{\substack{r\le x\\(r,q)=1}} \frac{\mu(r)\varphi(r)}{u(r)r} \prod_{p|r}\frac{p^2}{p^2-1}\log x + O(\log\log 3qx)\\
&= \frac{\varphi(q)}{q} \prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \sum_{\substack{r\le x\\(r,q)=1}} \mu(r) \prod_{p|r}\frac{p-1}{(p^2-1)(p+1)}\log x + O(\log\log 3qx)\\
&= \frac{\varphi(q)}{q} \prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{(p+1)^2}\right)\log x + O(\log\log 3qx).
\end{aligned}
$$

由此可知：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\varphi^2(q)}{q^2} \prod_{p\nmid q}\frac{p(p+2)(p^2-1)^2}{p^4(p+1)^2}\log^2 x + O(\log x\log\log 3qx)\\
&= \frac{\varphi^2(q)}{q^2} \prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\left(1+\frac{2}{p}\right)\log^2 x + O(\log x\log\log 3qx)\\
&= \prod_{p|q}\frac{p}{p+2}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\left(1+\frac{2}{p}\right)\log^2 x + O(\log x\log\log 3qx).
\end{aligned}
$$

对于 S_2，进行类似于对 S_1 的处理可知：

$$
S_2 = \frac{\varphi(q)}{q} \prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \sum_{\substack{r\le x\\(r,q)=1}} \frac{\mu(r)}{u(r)r} \underbrace{\sum_{\substack{t\le x/r\\(t,rq)=1}} \frac{\mu^2(t)\log rt}{t}}_{S_5}.
$$

将定理5.8代入到 S_5 中，便有：

$$\begin{aligned}
S_5 &= \sum_{\substack{t\le x/r\\(t,rq)=1}} \frac{\mu^2(t)\log t}{t} + O\left\{\sum_{t\le x}\frac{1}{t}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\varphi(q)}{q}\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\log^2\frac{x}{r} + O(\log x) + O\{(\log\log 3qr)^2\}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\varphi(q)}{q}\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\log^2 x + O(\log x\log^2 k) + O\{(\log\log 3qr)^2\}.
\end{aligned}$$

因为：

$$\begin{aligned}
\sum_{r\le x}\frac{1}{u(r)r}(\log\log 3qr)^2 &\ll \sum_{r\le q}\frac{1}{r^2}(\log\log 3q)^2 + \sum_{r\le x}\frac{1}{r^2}(\log\log 3r)^2\\
&\ll (\log\log 3q)^2\sum_{r\ge 1}\frac{1}{r^2} \ll (\log\log 3q)^2,
\end{aligned}$$

所以有：

$$\begin{aligned}
S_2 = \frac{1}{2}\prod_{p|q}\frac{p}{p+2}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\left(1+\frac{2}{p}\right)\log^2 x\\
+ O(\log x) + O\{(\log\log 3q)^2\}.
\end{aligned}$$

将这些式子整合起来证明就完成了。 □

5.6.4 无平方因子数 Euler 函数值的倒数和

定理 5.10. 当 $x, q \ge 1$ 时总有：

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(q)}{q}\log x + O(\log\log 3q).$$

Proof. 结合 Euler 函数的性质，可知：

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} &= \sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\mu^2(n)}{n}\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)=\sum_{\substack{n\le x\\(n,q)=1}}\frac{\mu^2(n)}{n}\sum_{d\mid n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\\
&= \sum_{\substack{d\le x\\(d,q)=1}}\frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)}\sum_{\substack{k\le x/d\\(k,qd)=1}}\frac{\mu^2(k)}{k}\\
&= \frac{\varphi(q)}{q}\sum_{\substack{d\le x\\(d,q)=1}}\frac{\mu^2(d)}{d^2}\prod_{p\nmid qd}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\log\frac{x}{d}+O(\log\log 3q)\\
&= \frac{\varphi(q)}{q}\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\sum_{\substack{d\ge 1\\(d,q)=1}}\mu^2(d)\prod_{p\mid d}\frac{1}{p^2-1}\log x+O(\log\log 3q)\\
&= \frac{\varphi(q)}{q}\prod_{p\nmid q}\frac{p^2-1}{p^2}\left(1+\frac{1}{p^2-1}\right)\log x+O(\log\log 3q).
\end{aligned}$$

将遍历 $p\nmid q$ 的乘积化简即得定理中的展开式。 □

参考文献

[1] Viggo Brun. Le crible d'Eratosthene et le theoreme de Goldbach. *Skr. Norske Vid. Akad*, 3:1–36, 1920.

[2] A. Buchstab. Neue Verbesserungen in der Methode des Eratosthenischen Siebes. *Mat. Sbornik*, 46(2):375–387, 1938.

[3] H. Halberstam and H.-E. Richert. *Sieve methods*. Number 4 in L.M.S. monographs. Academic Press, London ; New York, 1974.

[4] Henryk Iwaniec. *Sieve methods*. Unpublished lecture notes, 1996.

[5] Hans Rademacher. Beiträge zur viggo brunschen methode in der zahlentheorie. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 3(1):12–30, December 1924.

[6] Atle Selberg. On the zeros of Riemann's zeta-function. *Skr. Norske Vid. Akad*, 10, 1942.

[7] Atle Selberg. On an Elementary Method in the Theory of Primes. *Norske Vid. Selsk. Forh. Trondhjem.*, 19:64–67, 1947.

[8] Harold N. Shapiro and Jack Warga. On the representation of large integers as sums of primes. Part I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 3(2):153–176, June 1950.

[9] E. C. Titchmarsh. A divisor problem. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 54:414–429, 1930.